Versuch 251- Statistik des radioaktiven Zerfalls

PAP 2.2

Teilnehmender Student: **Harish Mahendran**

Gruppe des Teilnehmenden: **4**

Kurs: **Diensttag**

Inhaltsverzeichnis

0 Messprotokoll **1**

1 Einleitung **3**
1.1 Motivation . . . 3
1.2 Grundlagen aus der Physik . . . 3
1.2.1 Geiger-Miller-Zählrohr . . . 5

2 Durchführung **6**
2.1 Versuchskizzen . . . 6
2.2 Messverfahren . . . 6
2.2.1 Messung der Zählrohrcharakteristik . . . 6
2.2.2 Messung des Plateauanstiegs . . . 7
2.2.3 Verifizierung der statistischen Natur des radioaktiven Zerfalls . . . 7
2.2.4 Vergleich von Poisson und Gauß bei kleinen Zählraten . . . 7

3 Auswertung **8**
3.1 Zählrohrchararkteristik . . . 8
3.2 Plateau des Zählrohrs . . . 8
3.3 Hohe Ereigniszahlen . . . 11
3.4 Niedrige Ereigniszahl . . . 12

4 Zusamenfassung und Diskussion **14**
4.1 Diskussion und Kritik . . . 14
4.1.1 Zählcharakteristik und Plateau-Messung . . . 14
4.1.2 Gauß- und Poissonverteilung . . . 14
4.2 Fazit . . . 14

0. Messprotokoll

Messprotokoll: Statistik des radioaktiven Zerfalls

Messgeräte:
- Geiger - Müller
- externer Impulszähler
- PC
- Präparatehalterung mit Bleiabschirmung
- Radioaktives Präparat (^{60}Co)

Aufgabe 1: Zählrohrcharakteristik

Zuerst wollen wir die Zählrohrcharakteristik bestimmen. Dafür stellen wir die Spannung ein, bis wir schlagartig das Klicken des Zählers hören. Wir bestimmen, dass die Einsatzspannung $V_E = (500 \pm 5)V$ ist. Wir messen nun in 25V-schritten die Spannung und lassen 30s die Ticks zählen.

U[V]	500	525	550	575	600	625	650
n	1956	1948	1983	1981	1994	2054	2014

$\Delta U = \pm 5V$ ✓

Tabelle 1: Ticks pro angelegte Spannung pro 30s

Wir legen $U_0 = 580V$ fest.

Aufgabe 2: Plateauanstieg

Wir bringen das Präparat dicht an das Zählrohr und messen für U_0 und $U_0 + 100V$ eine bzw. drei Minuten die Ticks

	1 min		3 min	
U[V]	580	680	580	680
n	14682	14973	44247	45593

$\Delta n = \sqrt{n}$ ✓

Tabelle 2: Ticks pro Spannung pro Zeit im Plateaubereich

Aufgabe 3: Verifizierung der statistischen Natur des radioaktiven Zerfalls

Nun führen wir eine Langzeitmessung durch, bei der wir 2000 mal bei einer Zerfallsrate von ca. 150-160 $\frac{\text{Zerfälle}}{s}$ und einer Torzeit von 0,5s die Zerfälle pro Torzeit messen. Wir tragen diese Messungen mit einem Computerprogramm in ein Histogramm auf.

Anzahl der Messung: 2000
Mittelwert : 70,52
σ : 8,53

Aufgabe 4:

Wir tragen erneut die Ergebnisse einer Messreihe auf, diesmal allerdings bei einer Zerfallsrate von 40-50 $\frac{\text{zerfällen}}{s}$, einer Torzeit von 0,1s und 5000 Messungen.

Anzahl der Messung: 5000
Mittelwert : 4,03
σ : 2,03

1. Einleitung

1.1 Motivation

Radioaktiver Zerfall ist ein Prozess, der einem Zufallsprinzip folgt. Allerdings unterliegt dieser Zufall bei ausreichend großen Stichproben, den statistischen Gesetzen. In diesem Experiment sollen diese Prinzipien anhand von Messungen an spezifischen radioaktiven Präparaten überprüft und verständlich gemacht werden. Zudem werden Überlegungen zu statistischen Fehlern und deren Verhalten in unterschiedlichen Messreihen angestellt, um ein tieferes Verständnis der zugrunde liegenden Zusammenhänge zu gewinnen.

1.2 Grundlagen aus der Physik

Der radioaktive Zerfall in einem Material ist unabhängig von den einzelnen Zerfallsprozessen. Die Anzahl der Messungen die man dann in einem Zeitintervall t misst, ist zufällig. Weswegen man sich hier die statistische Verteilung anschaut.

Binomialverteilung

Die Binomialverteilung gibt die Wahrscheinlichkeit an ,dass k-mal ein Ereignis von einer Wahrscheinlichkeit von p, bei insgesamt von n Versuchen eintritt. Die Formel ist gegeben als

$$B(k;n,p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \tag{1}$$

Wobei $\binom{n}{k}$ gegeben ist als

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \tag{2}$$

Es gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, aus n Elementen k zu wählen.
Die Zerfalsswahrscheinlichkeit p ist abhängig vom Beobachtungszeitraum ab. Es gilt folgende Relation:

$$p(t) = 1 - e^{-\lambda t} \tag{3}$$

hierbei ist die Zerfallungskonstante λ die von dem Isotop abhängige Konstante. Die ist in diesem Versuch sehr klein, weswegen man hier die Näherungen verwenden kann, dass in einem bestimmten Beobachtungszeitraum, die Zerfallswahrscheinlichkeit p konstant bleibt. In diesem Versuch sind die Werte für n sehr groß und die Wahrscheinlichkeit sehr klein. Man kann hier durch Näherungen von $(p \to 0)$ und $(n \to \infty)$, mit der Bedingung, dass der Erwartungswert $\langle k \rangle$ endlich bleibt , die Poisson-Verteilung verwenden.

Poisson-Verteilung

Die Poisson-Verteilung erhält man mit den Näherungen aus der Binomialverteilung. Die ist abhängig von den eingetretenen Ereignissen k und dem Mittelwert $\mu := np$. Man erhält mit der Herleitung aus *Wagner, Jens: "Physikalisches Anfängerpraktikum 2.2", 2024, S.60*

$$P(k;\mu) = \frac{\mu^{k-\mu}}{k!} \tag{4}$$

Die Eigenschaften der Poisson-Verteilungen sind gegeben als

$$\text{Mittelwert: } \langle k \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(k;\mu) = \mu \tag{5}$$

$$\text{Standardabweichung: } \sigma = \sqrt{\mu} \tag{6}$$

Für genügend große Mittelwerte ($\mu > 30$) geht die Poisson-Verteilung in die Gauß-Verteilung über.

Gauß-Verteilung

Man erhält also folgende Annäherung der Poisson-Verteilung durch die Gaußverteilung

$$G(k;\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} e^{-\frac{(\mu-k)^2}{2\mu}} \tag{7}$$

Herleitung ist auch hier unter *Wagner, Jens: "Physikalisches Anfängerpraktikum 2.2", 2024, S.60* zu finden.
Die allgemeine Verteilung ist mit $\sigma^2 = \mu$,wie folgt gegeben

$$G(k;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\mu-k)^2}{2\sigma^2}} \tag{8}$$

Hierbei wird k nicht diskret sondern als kontinuierlich betrachtet, also $k \in \mathbb{R}$. Weswegen man bei der auch bei Mittelwert und Varianz über k integriert. Man erhält also folgende Eigenschaften für die Gaußverteilung:

$$\text{Mittelwert: } \int_{-\infty}^{\infty} kG(k;\mu,\sigma)dk = \mu \tag{9}$$

$$\text{Standardabweichung: } \sigma = \sqrt{\mu} \tag{10}$$

Statistik und Messfehler

In der Praxis wird meist nicht von einem vorgegebenen Mittelwertμausgegangen, sondern der Mittelwert wird aus dem gemessenen Ergebnis k abgeleitet. Dabei gibt G(μ; k) die

Wahrscheinlichkeit an, dass eine sehr lange Messreihe den Mittelwertμ ergeben würde. Nach einer ausreichend langen Messung stellt das gemessene Ergebnis k somit eine Annäherung an den tatsächlichen Mittelwert dar. Unter der Annahme, dass k und μ nicht stark von einander abweichen, erhält man

$$\sigma = \sqrt{k} \tag{11}$$

Wenn man sein Ergebnis als $k \pm \sqrt{k}$ angibt, definiert man damit den Fehlerbereich als eine 1-*sigma*Umgebung. Das bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit, dass der tatsächliche Wert innerhalb dieses Bereichs liegt, etwa 68 % beträgt. Für ein Intervall von $\pm 2\sqrt{k}$ um den gemessenen Wert k beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass der tatsächliche Wert darin liegt, ungefähr 95 %. Dies folgt den allgemeinen Regeln der Normalverteilung. Zur Beurteilung ob die Abweichung von zwei Zählermessung k_1 und k_2 statistisch oder systematisch ist, betrachtet man ob die Differenz ziwschen und den mittleren statistischen Fehler σ_Δ. Dieser ist gegeben als

$$\sigma_\Delta = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sqrt{k_1 + k_2} \tag{12}$$

Bei einer Differenz von mehr als 3Δ handelt es sich hierbei um eine signifikante Abweichung.

1.2.1 Geiger-Miller-Zählrohr

Um die Anzahl der Zefälle die in einem bestimmten Zeitintervall geschehen zu bestimmen, verwenden wir ein Geiger-Müller Zählrohr. In diesem trifft die ausgesendete Ionisierende-Strahlung auf Gas, was aufgrund der Strahlung ionisiert wird. Es enstehen dadurch freie e^- und postiv geladene Ionen. Aufgrund der Spannung innerhalb des Rohres werden diese von den Elektroden angezogen. Man kann dann ein Spannungsimpuls messen. In diesem Versuch wird eine Spannung U_0 so angelegt, dass man sich in dem Plateaubereich befindet. In diesem wird immer ein gleich großes Entladungsignal erzeugt, unabhängig von der Energie der einfallenden Teilchen. Da hier jedes Teilchen eine "e^--Lawine"verursacht. In der Ausarbeitung werden wir den Plateauanstieg berechnen. Dazu benötigen wir folgende Formel

$$N_{100} - N_0 \tag{13}$$

und für den prozentualen Anstieg p

$$\frac{N_{100} - N_0}{N_0} = p \tag{14}$$

2. Durchführung

2.1 Versuchskizzen

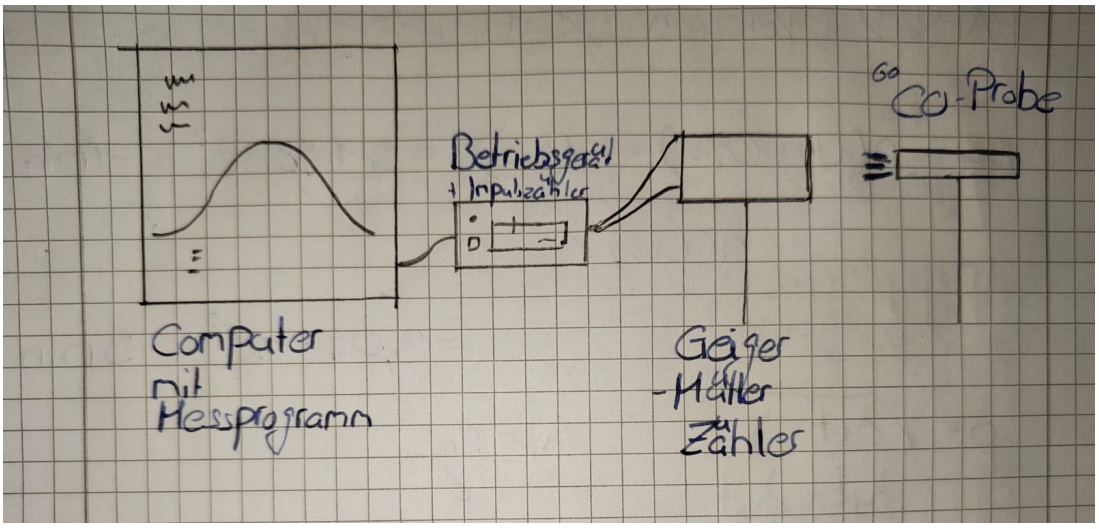


Abbildung 1: Versuchsaugbau

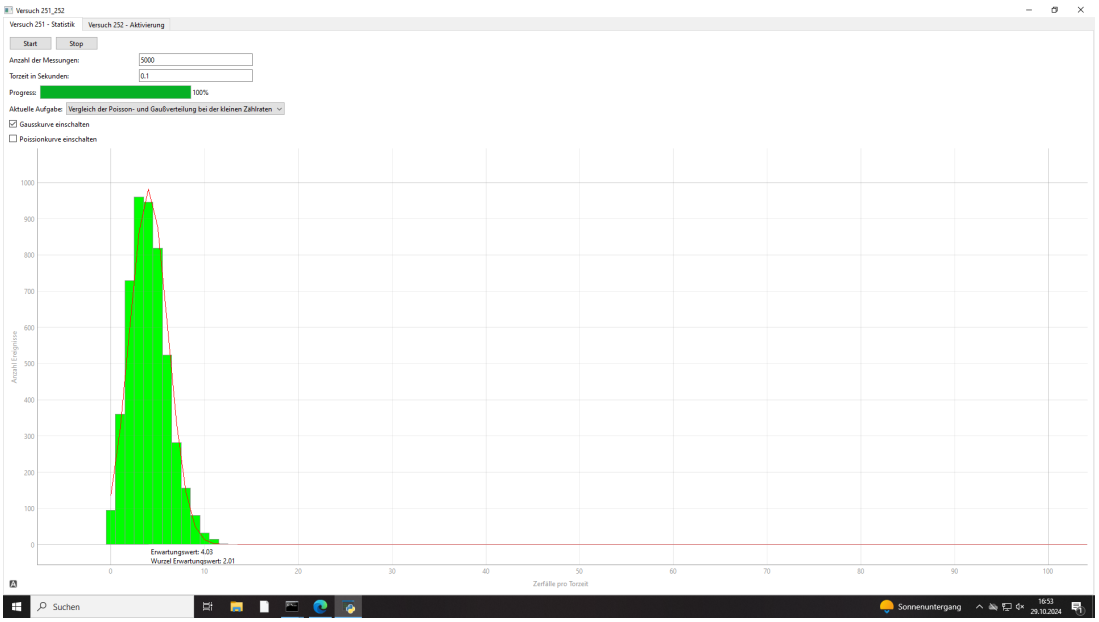


Abbildung 2: Statistik-Programm bei der Messung bei der niedrigen Zählrate

2.2 Messverfahren

2.2.1 Messung der Zählrohrcharakteristik

Die Spannung im Zählrohr wird von einem niedrigen Wert so lange erhöht, bis gerade Strahlung detektiert wird, dies ist ungefähr 500 V der Fall. Es wird nun die Spannung in $25V$ nach oben variiert, und jeweils die Ereignisse über bestimmte Zeitintervalle gemessen.

2.2.2 Messung des Plateauanstiegs

Die ^{60}Co-Probe wird sehr nah an das Zählrohr gebracht, und es werden jeweils für eine, beziehungsweise für 3 Minuten die Anzahl der Ereignisse bei (580 ± 10) V und (680 ± 10) V gemessen.

2.2.3 Verifizierung der statistischen Natur des radioaktiven Zerfalls

Die Zählrohrspannung wird wieder auf (580 ± 10) V gesenkt, die ^{60}Co-Probe wird auf eine Entfernung zum Zählrohr gebracht, bei der etwa 140 bis 150 Zerfälle pro Sekunde gemessen werden. Am Computer wird das *Statistik* gestartet. Die Torzeit wird auf 500 ms eingestellt. Es werden mindestens 2000 Messungen durchgeführt.

2.2.4 Vergleich von Poisson und Gauß bei kleinen Zählraten

Die Probe wird so weit vor dem Zählrohr aufgestellt, dass etwa 40 bis 50 Zerfälle pro Sekunde gezählt werden. Die Torzeit wird auf 100 ms eingestellt. Es werden analog zu oben mindestens 5000 Messungen durchgeführt.

3. Auswertung

3.1 Zählrohrchararkteristik

Es wird nun noch mit dem Least-Squares-Algorithmus eine Gerade durch die Messpunkte aus gefittet. Daraus erhalten wir folgendes Diagramm:

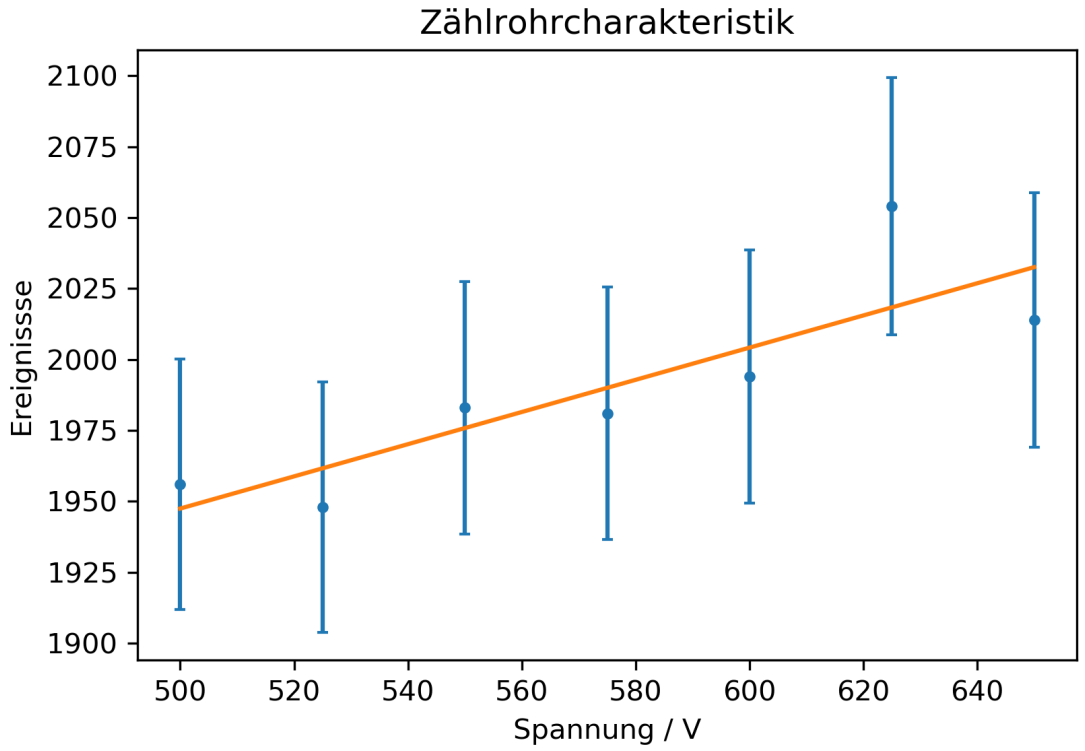


Diagramm 1: : Zählrohrcharakteristik

Daraus erhalten für die Mitte des Plateaubereichs eine Spannung von

$$U_0 = (580 \pm 10)V$$

3.2 Plateau des Zählrohrs

Wir erhalten aus den Messungen folgenden Plateauanstieg für 1 min mit Gleichung (13):

$$A_{1min} = 4,9\frac{1}{s}$$

und für 3 min :

$$A_{3min} = 7,5\frac{1}{s}$$

und daraus erhalten wir folgende prozentualen Anstieg mit Gleichung (14)

$$1 \text{ min: } (2,0 \pm 1,1)\%$$
$$3 \text{ min: } (3,0 \pm 0,7)\%$$

Mit dem Fehler der wie folgt berechnet wurde

$$\Delta p = p\sqrt{(\frac{\Delta N_{100}}{N_{100}})^2 + (\frac{\Delta(N_{100} - N_0)}{N_{100} - N_0})^2}$$

Mit

$$\Delta N_{100} = \sqrt{N_{100}}$$
$$\Delta(N_{100} - N_0) = \sqrt{N_{100} + N_0}$$

Um zu bestimmen ob die Anstiege signifikant sind berechnen wir die Standardabweichung mit Gleichung (12), wir erhalten dadurch

$$1 \text{ min: } 2,8\frac{1}{s}$$
$$3 \text{ min: } 2,0\frac{1}{s}$$

durch anschließendes Teilen der Anstiege durch deren Standardabweichungen erhalten wir folgende Abweichungen

$$1 \text{ min: } 1,69$$
$$3 \text{ min: } 4,87$$

Da eine Abweichung von mehr als 3 signifikant ist, kann man sagen, dass bei der $3min$ der Anstieg signifikant ist.
Um den Plateauanstieg auf genau 1% zu kennen, benötigen wir folgende Gleichung

$$p = \frac{\sqrt{\lambda_{100}t + \lambda_0 t}}{\lambda_{100}t - \lambda_0 t}$$

mit

$$\lambda_{100} = \frac{N_{100}}{t} \text{ und } \lambda_0 = \frac{N_0}{t}$$

durch umstellen nach t erhalten wir

$$t = \frac{\sqrt{\lambda_{100} + \lambda_0}}{(\lambda_{100} - \lambda_0)p^2}$$

Durch einsetzten der Werte die man aus der $1min$-Messung erhält mit

$$\lambda_{1001} = 249,55\frac{1}{s}$$
$$\lambda_{01} = 244,7\frac{1}{s}$$
$$p = 0,01$$

folgenden Wert

$$t = (45839 \pm 2,5)s \Rightarrow 12,73h$$

mit folgender Fehlerformel

$$\Delta t = \frac{1}{2(\lambda_{100} - \lambda_0)^2 \cdot \sqrt{\lambda_{100} + \lambda_0}} \sqrt{((-\lambda_{100} - 3\lambda_0)\Delta\lambda_{100})^2 + ((3\lambda_{100} + \lambda_0)\Delta\lambda_0)^2}$$

Um zu berechnen wie groß die prozentuale Variation q der Zählrate bei einer Spannung von $U_0 + 100V$ brauchen wir folgende Formel

$$\begin{aligned} q &= \frac{\sigma_{100}}{N_{100}} \\ &= \frac{n\sqrt{N_{100}}}{N_{100}} \\ &= \frac{n}{\sqrt{N_{100}}} \end{aligned}$$

Wobei n der Bereich der σ-Variationen ist. Bei $n = 1$ erhalten wir ein Vertrauensniveau von 68% und bei $n = 2$ 95%. Wenn wir die Werte einsetzen erhalten wir für 68% :

$$q = (0,817 \pm 0,003)\%$$

und für 95%

$$q = (1,634 \pm 0,007)\%$$

mit der Fehlerformel

$$\Delta q = q\sqrt{\frac{\Delta N_{100}}{2 \cdot N_{100}}}$$

3.3 Hohe Ereigniszahlen

Es werden nun die Messdaten mit der höheren mittleren Ereigniszahl ausgewertet. Dazu wird auf den Datensatz eine Gaußfunktion gefittet.Da die Näherungen hier sinvoll sind. Dazu werden noch die Werte, für die die Häufigkeiten$<$ 10 sind ausgenommen, da sie sonst aufgrund ihrer nicht-gaußartigen Verteilung den χ^2-Fitalgorithmus stören würden. So wurden die ersten 20, und die letzten 20 Werte vernachlässigt:

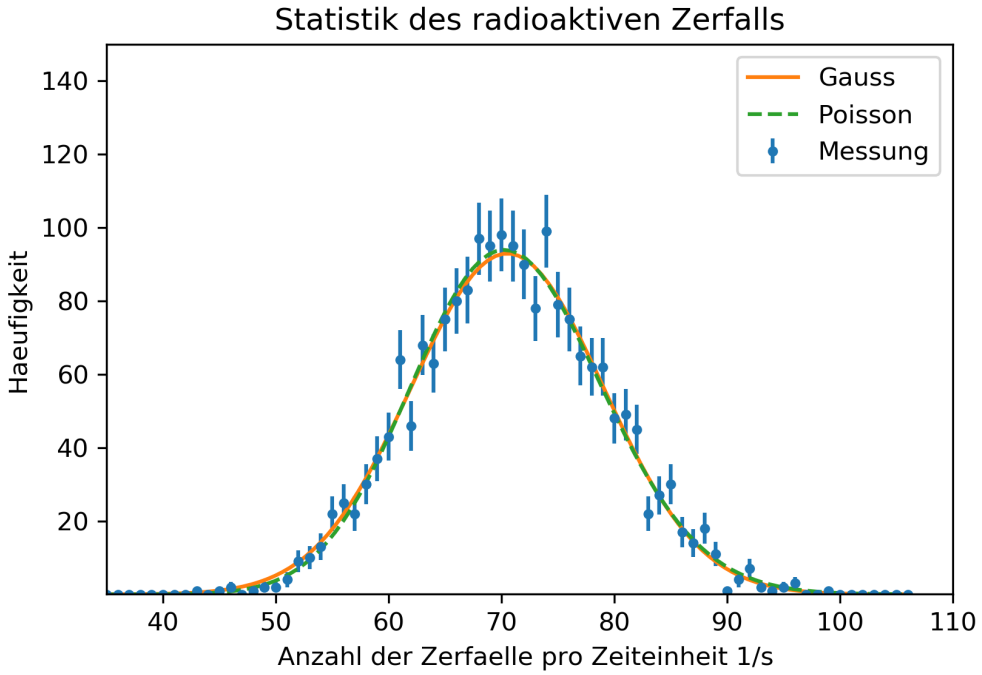


Diagramm 2: Messung mit höheren Zählaktivität mit Gauß und Poisson-Fit

Folgende Werte wurden in Python berechnet die Formel findet man im Python Code Wir erhalten dadurch folgende Werte für den Mittelwert

$$\text{Gauß:}\mu_g = (70,52 \pm 0,23)\frac{\text{Zerfälle}}{s} \qquad \text{Poisson:}\mu_p = (70,77 \pm 0,21)$$

für die Standardabweichung für Gauß

$$\text{Gauß:}\sigma_g = (8,59 \pm 0,24) \approx \sqrt{\mu}$$

Dass die Standardabweichung der Wurzel aus dem Erwartungswert entspricht bestätigt Gleichung (11). Die Fit-Wahrscheinlichkeiten für Gauß beträgt

$$78\%$$

für Poisson

$$78\%$$

Für die χ^2-Summe erhalten wir

$$\text{Gauß:}\chi_g^2 = 23,83 \qquad \text{Poisson:}\chi_p^2 = 23.83$$

wenn man diesen durch die Anzahle der Freiheitsgrade teilt erhält man

$$\text{Gauß:}\chi_{red_g}^2 = 0,78 \qquad \text{Poisson:}\chi_{red_p}^2 = 0.79$$

Die Güte des Fits ist gut, da χ_{red}^2 unterhalb von 1 liegt. Was verwunderlich ist, dass der Poisson-Fit eine schlechtere Güte hat. Man würde hier eher erwarten, dass dieser Größer ist, da Gauß nur eine Näherung der Poisson-Verteilung ist. Ein Möglicher Grund könnte sein, dass durch die statistische Verteilung ein besserer Fit angelegt werden könnte.

3.4 Niedrige Ereigniszahl

Analog erhalten wir folgendes Diagramm. Damit der Unterschied zwischen Poisson und Gauß besser ersichtlich wird, werden die y-Werte auf einer log-Skala aufgetragen. Man erwartet dadurch einen Verlauf von $-x^2$ in diesem Diagramm.

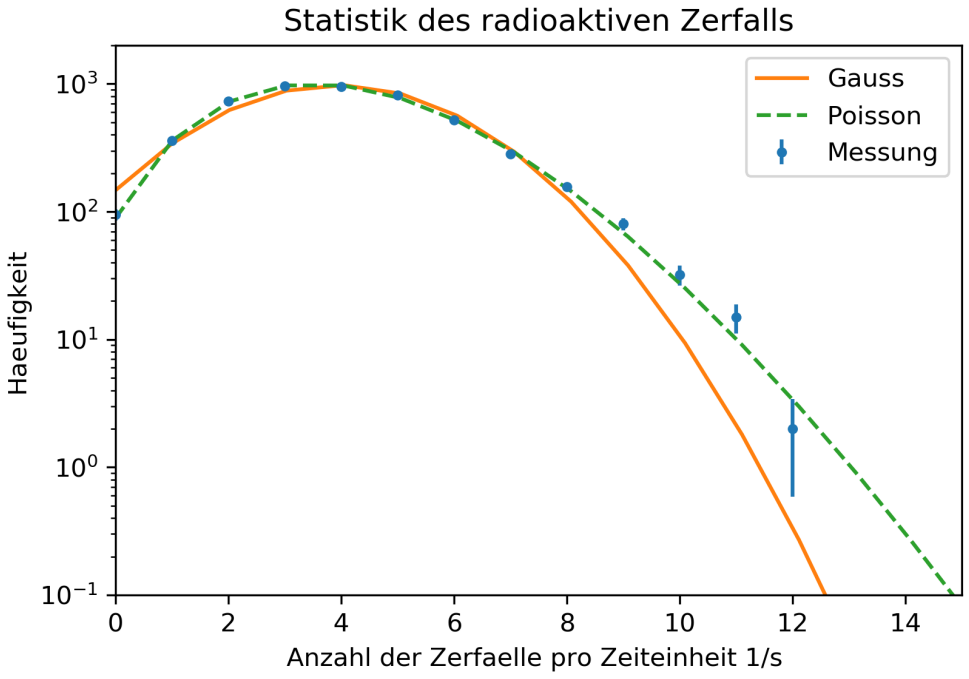


Diagramm 2: Messung mit niedriger Zählaktivität mit Gauß und Poisson-Fit

Folgende Werte wurden in Python berechnet die Formel findet man im Python

Code Wir erhalten dadurch folgende Werte für den Mittelwert

$$\text{Gauß:}\mu_g = (3,93 \pm 0,03)\frac{\text{Zerfälle}}{s} \qquad \text{Poisson:}\mu_p = (4,03 \pm 0,03)$$

für die Standardabweichung für Gauß

$$\text{Gauß:}\sigma_g = (2,020 \pm 0,024) \approx \sqrt{\mu}$$

Für die χ^2-Summe erhalten wir

$$\text{Gauß:}\chi^2_g = 113.32 \qquad \text{Poisson:}\chi^2_p = 11.33$$

wenn man diesen durch die Anzahle der Freiheitsgrade teilt erhält man

$$\text{Gauß:}\chi^2_{red_g} = 9.45 \qquad \text{Poisson:}\chi^2_{red_p} = 0.86$$

4. Zusamenfassung und Diskussion

4.1 Diskussion und Kritik

4.1.1 Zählcharakteristik und Plateau-Messung

Um die Messgenauigkeit dieser Messung zu erhöhen, könnte man die Messungen bei den einzelnen Spannungswerten mehrfach wiederholen, um die statistischen Schwankungen zu minimieren. Da die Anzahl der Ereignisse ohnehin zufällig ist wäre dies nur sinnvoll. Auch wäre eine Vergrößerung der Messzeit denkbar. Gleiches gilt für die Messung der Plateauerhöhung. Was auch ein Faktor für Störungen in diesem Versuch sein könnte, ist die Nullstrahlung, also die Strahlung die nicht von dem Präparat ausgesendet wird. Dies ist jedoch zu vernachlässigen, da dieser durch anschließender Messung bestimmt wurde und bei ca. $50\frac{Ereignisse}{min}$ liegt, also vernachlässigbar klein.

4.1.2 Gauß- und Poissonverteilung

Man sieht, dass die Näherung der Gauß-Verteilung bei größeren Erwartungswerten berechtigt ist, aber bei kleineren Erwartungwerten eher die Poissonverteilung sinnvoll ist. Um diese Verläufe besser ersichtlich zu machen würde hier auch eine Erhöhung der Messzeit sinnvoll.

4.2 Fazit

Wir konnten in diesem Versuch die Handhabung mit Radioaktiven Stoffen lernen und die statistische Natur des Radioaktivenzerfalls bestätigen. Auch konnten wir sehen in, welchen Fällen man die Gauß- bzw. Poissonverteilung als Näherung der Binomialverteilung verwenden kann. Insgesamt entsprechen alle Ergebnisse den Erwartungen, oder lassen sich durch weitere Messungen entsprechend verbessern.